aefe
Agence pour l'enseignement français à l'étranger

Apprendre à raisonner et à démontrer

Formation du 23 et 24 mars 2017
Ecole Voltaire de BERLIN

Nicolas Villemain
Richard Cabassut

Raisonner et démontrer, c'est quoi ?

Objectifs visés :

Identifier des types de raisonnements pour chercher et pour démontrer.

Montrer que différents domaines (géométrie, probabilité, nombres …) et différents niveaux permettent d'apprendre à raisonner et à démontrer.

Préciser le vocabulaire et les notions liées au raisonnement et à la démonstration.

Première réflexion sur le numérique et l'algorithmique en appui au raisonnement et à la démonstration.

Raisonner et démontrer, c'est quoi ?

Production attendue:

Produire des analyses d'activités d'apprentissage au raisonnement et à la démonstration dans différents domaines et à différents niveaux (primaire, secondaire).

Produire un lexique les notions liées au raisonnement et à la démonstration.

Lexique sur le raisonnement et la démonstration

Raisonner : inférer une conclusion de données.

Argument : raisonnement élémentaire (qu'on ne peut pas décomposer en des raisonnements plus simples).

Règle d'inférence de l'argument : une règle qui permet d'inférer de données à la conclusion de l'argument.

Logique : Théorie qui organise les règles d'inférences.

Démontrer en mathématiques qu'une proposition est vraie c'est établir par des raisonnements, à partir de définitions et théorèmes mathématiques acquis, en utilisant les règles d'inférence de la logique mathématique, que la proposition est vraie.

Démonstration mathématique : peut être décomposée en une suite linéaires d'arguments mathématiques, partant des données initiales, chaque argument utilise comme données des conclusions d'arguments précédents et/ou des données initiales. Le dernier argument abouti à la conclusion finale.

Montrer, justifier, déduire, prouver. Données, hypothèse, conjecture, conclusion.

Consigne de l'activité de formation

Vous vous répartirez en groupes suivant les consignes suivantes : (Tableau Organisation)

- un groupe de collègues du primaire sur le problème des trois portes

- un groupe de collègues du secondaire sur le problème des trois portes

- un groupe de collègues du secondaire sur le problème de la somme des angles d'un triangles

En groupe, vous allez analyser (30 min) un problème en précisant notamment :

- les raisonnements que l'on peut attendre pour chercher une solution au problème,

- les raisonnements que l'on peut attendre pour démontrer qu'une solution est solution du problème,

- les appuis éventuels du numérique et de l'algorithmique en appui aux raisonnements ou démonstrations.

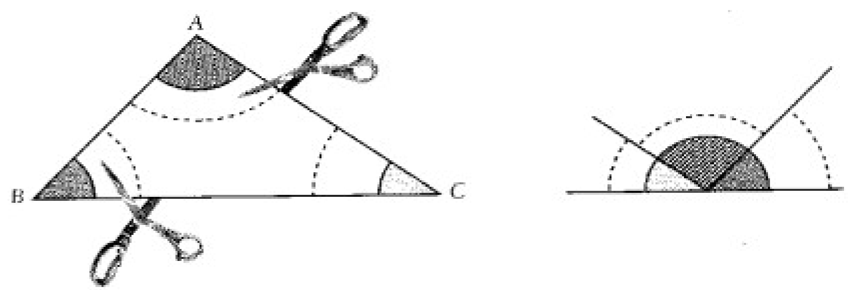
Vous proposerez une trace écrite de votre analyse qui pourra être prise en photo.

Vous présenterez ensuite en collectif le problème aux autres groupes et les résultats de votre analyse.

Echange collectif sur les problèmes

① **En découpant**

a. Trace sur papier blanc un triangle ABC comme celui dessiné ci-dessous.
b. Découpe chacun de ses angles, puis « regroupe »-les comme l'indique le dessin ci-dessous.



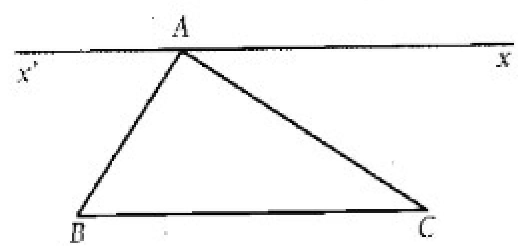
c. Quelle semble être la valeur de la somme des angles du triangle ?

② **En mesurant avec ton rapporteur**

a. Trace trois triangles.
b. Mesure les angles de chacun de ces triangles à l'aide d'un rapporteur, puis calcule la somme des angles de chaque triangle.
c. Quelle semble être la valeur de cette somme ?

③ **Une démonstration à présent**

La droite $(x'x)$ est parallèle à la droite (BC) et passe par A.



a. Compare les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAx'}$, puis $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAx}$.
b. Explique alors pourquoi la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180°.

Mathématiques 5ème, collection « Nouveau Transmath », Nathan 1997, p. 225

Commentaires après travail en groupe sur la diapositive précédente

- La première situation de découpage des angles du triangles et d'ajustement des trois morceaux pour former approximativement un angle plat illustre une validation pragmatique : c'est vrai parce que l'action réussit ; en manipulant les morceaux on voit qu'ils forment approximativement un angle plat.
- La seconde situation utilise la mesure des angles du triangle. On améliore le raisonnement précédent en partageant un instrument commun, le rapporteur, ce qui rendra le résultat plus objectif que précédemment (où l'action du découpage et de l'assemblage dépendait de chacun). Cependant dans la manipulation de l'instrument et la lecture des mesures l'approximation demeure.

Dans les deux cas on déduit de cas particuliers (l'exemple générique d'un triangle « quelconque choisi » ou la série de mesure sur différents triangles) que la somme des angles d'un triangles semble être approximativement un angle plat.

- On utilise ici un raisonnement inductif (induire un résultat sur des cas particuliers de triangles un résultat général à tous les triangles). Ces raisonnements sont valables mathématiquement dans la phase heuristique d'une résolution de problème pour conjecturer un résultat possible. Par contre ils ne constituent pas en mathématiques des raisonnements de validation de la conjecture (qu'on appelle encore des démonstrations).
- Intéressons-nous au raisonnement de démonstration proposé dans la troisième situation de la diapositive.

Commentaires après travail en groupe sur la diapositive précédente précédente

- Dans la troisième situation, on annonce une démonstration. La question a) invite à reconnaître des angles alternes-internes. Et comme les droites (xx') et (BC) sont parallèles, on peut utiliser un théorème affirmant l'égalité de ces angles alternes-internes. On utilise enfin l'angle plat ∠xAx' pour arriver à la conclusion. Ici on est dans le domaine de la pensée et on procède par raisonnement déductif (((si A alors B) vrai et A vrai) donc B vrai) : on écarte le recours à l'action et à la perception.
- On remarquera cependant que la reconnaissance des angles alternes internes s'effectue visuellement. A ce niveau (classe de 5 ième) on acceptera des arguments visuels pour la géométrie de l'ordre (de part et d'autre).

Commentaires après travail en groupe sur la diapositive précédente précédente

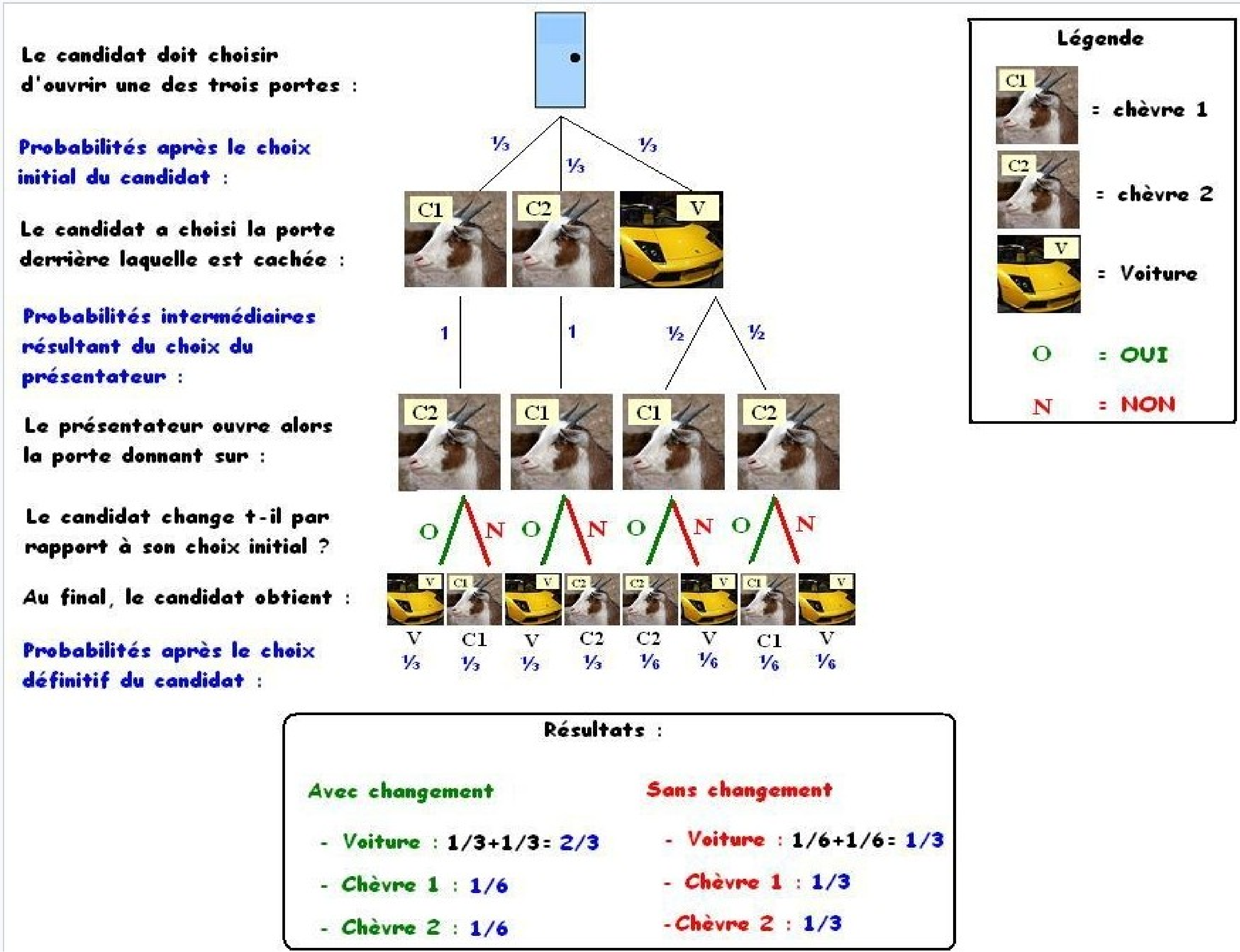
- Dans la troisième situation, on annonce une démonstration. La question a) invite à reconnaître des angles alternes-internes. Et comme les droites (xx') et (BC) sont parallèles, on peut utiliser un théorème affirmant l'égalité de ces angles alternes-internes. On utilise enfin l'angle plat ∠xAx' pour arriver à la conclusion. Ici on est dans le domaine de la pensée et on procède par raisonnement déductif (((si A alors B) vrai et A vrai) donc B vrai) : on écarte le recours à l'action et à la perception.
- On remarquera cependant que la reconnaissance des angles alternes internes s'effectue visuellement. A ce niveau (classe de 5 ième) on acceptera des arguments visuels pour la géométrie de l'ordre (de part et d'autre).

Le problème des trois portes

Supposez que vous êtes sur le plateau d'un jeu télévisé, face à trois portes et que vous devez choisir d'en ouvrir une seule, en sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres des chèvres. Vous choisissez une porte, disons la numéro 1, et le présentateur, qui lui sait ce qu'il y a derrière chaque porte, ouvre une autre porte, disons la numéro 3, porte qui une fois ouverte découvre une chèvre. Il vous demande alors : « désirez-vous ouvrir la porte numéro 2 ? ». À votre avis, est-ce à votre avantage de changer de choix et d'ouvrir la porte 2 plutôt que la porte 1 initialement choisie ? (d'après Wikipedia)

Commentaires après travail en groupe sur la diapositive précédente précédente

Voici une solution extraite de https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall :



Commentaires après travail en groupe sur la diapositive précédente précédente

Dans cet exemple du domaine des probabilités il est intéressant d'examiner les différents raisonnements proposés dont certains ne relèvent pas de la logique ou d'autres font des hypothèses qui demandent à être étayées par des arguments dont on examinera s'ils relèvent des mathématiques ou non.

Lexique sur le raisonnement

raisonnement déductif :

((si A alors B) vrai et A vrai) donc B vrai

raisonnement abductif :

((si A alors B) vrai et B vrai) donc A (probablement) vrai

raisonnement inductif :

Soit P(x) une forme propositionnelle de variable x dans J et I une partie stricte de J.

Le raisonnement inductif est le raisonnement suivant :

si (pour tout x de I , P(x) est vrai) alors (pour tout x de J , P(x) est vrai)

Pourquoi raisonner ou démontrer ?

Retour sur le questionnaire :

Quel intérêt le thème “raisonner et démontrer présente-t-il dans l’enseignement ?

Un des fondements des mathématiques

Une compétence transversale aux compétences mathématiques

Fondamental dans l’organisation des idées

Pour expliquer, rédiger

Pour argumenter convaincre

Pour développer la liberté de pensée des élèves

Pour synthétiser

Permet d’éprouver du plaisir

Pourquoi raisonner ?

D'après Blanché
(https://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Blanch%C3%A9)

Raisonner pour décider (choix pratique, esthétique, affectif …)

Raisonner pour persuader ou convaincre

Raisonner pour découvrir

D'après Toulmin

(https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Toulmin)

Raisonner pour vérifier la vérité, nécessaire ou plausible, d'une proposition

Pourquoi démontrer en mathématiques ?

D'après De Villiers :

- Démontrer pour vérifier la vérité d'une proposition
- Démontrer pour expliquer pourquoi la proposition est vraie
- Démontrer pour systématiser (organiser les connaissances dans une théorie locale ou globale
- Démontrer pour découvrir une notion, une méthode, un résultat
- Démontrer pour communiquer une connaissance

Particularité du raisonnement en algorithmique et programmation

D'après Lac et More (2017) *Raisonnement en algorithmique et programmation.* Repères IREM n°106

Raisonner pour :

- Comprendre ce que fait l'algorithme (fonction de l'algorithme : que fait-il ?) (Un essai sur des jeux de données ou à la main ne permet pas toujours de comprendre ce qu'il fait)
- Vérifier si l'algorithme est correct : il fait ce pourquoi on l'a conçu (la preuve d'un algorithme n'est pas encore un objectif du lycée mais sa vérification à la main ou sur des jeux de données est possible)
- Vérifier si l'algorithme se termine
- Apprécier l'efficacité (ou la complexité) d'un algorithme (en temps et en mémoire)

Raisonnement en algorithmique ou programmation

Extrait des Olympiades 2017 :

2 n considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.

Ainsi, par exemple, f (5) = 25, f(132) = 14.

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :

Si u_0 est un entier non nul :

- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,...

On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

a. Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?

b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?

d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*

Entrer u
  Tant que $(u \neq 1 \; et \; u \neq 4)$
  $u \leftarrow f(u)$
  Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »