Cours

3a-2 Proportionnalité Didactique

Sommaire

La mathématique du Chat, Philippe Geluck

1 La proportionnalité dans les programmes

Dans les programmes p.22/23

2 - Géométrie
Les figures planes : agrandissement et réduction de figures planes, en lien avec la proportionnalité.
4 - Organisation et gestion de données

La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures (en particulier celle dite de la « règle de trois ») sont utilisées.

Dans les progressions p.38

	CM1	**CM2**
Organisation et gestion de données	- Utiliser un tableau ou la « règle de trois » dans des situations très simples de proportionnalité.	- Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la « règle de trois »).

Compétences attendues à la fin du CM2 p.28

Compétence 3 :
L'élève est capable de :
- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, « règle de trois », figures géométriques, schémas.

L'étude de la proportionnalité pour elle-même relève du collège. À l'école primaire, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif

Les premiers problèmes de proportionnalité rencontrés dans la scolarité sont des problèmes de multiplication et des problèmes de division. Proposés dès le CE1, ils sont résolus à l'aide de procédures personnelles. Bien qu'il s'agisse de problèmes de proportionnalité, ce mot n'est pas utilisé à ce niveau.

L'introduction d'un langage spécifique de la proportionnalité n'a sa place qu'après résolution de nombreux problèmes de proportionnalité qui ont pour but de conduire les élèves à la réflexion sur les méthodes pertinentes. Le mot proportionnalité peut alors être introduit par l'enseignant, en général au CM1, et sert à étiqueter cette catégorie de problèmes. Ceci n'a de sens qu'à la condition d'avoir rencontré des problèmes de non proportionnalité et d'être capable de les différencier.

Au CM2, c'est la classe où le travail sur les problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité se structure tout en laissant une grande place aux procédures de figure. La construction de diagrammes et graphiques reste au stade de l'approche à l'école.

2 Les procédures de résolution à l'école

Il existe de multiples procédures de résolution de problèmes de proportionnalité (*cf. cours CM3a-1*). Au niveau de l'école primaire, on utilise essentiellement les propriétés de linéarité ainsi que le passage à l'unite, apparenté à la règle de trois. Dans les programmes 2008, cette dernière procédure experte est explicitement requise dans l'éventail des procédures que doivent pouvoir utiliser les élèves.

La règle de trois selon Euclide (300 av JC), traduction de 1632

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, ſera egal au produict du ſecond par le tiers: Et ſi le produict du premier multiplié par le quart, eſt egal au produict du ſecond par le tiers; iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

ce qui se traduit par : « Si quatre nombres sont proportionnels, le produit du premier multiplié par le quatrième sera égal au produit du second multiplié pas le troisième. Inversement, si le produit du premier multiplié par le quatrième est égal au produit du second multiplié pas le troisième., ces quatre nombres sont proportionnels »

Exemple 1

Axelle a acheté six billes toutes identiques et au même prix. Elle a payé 2,20 €.
Combien aurait-elle payé si elle en avait acheté 15 ?

Procédure utilisant la linéarité :	*Passage à l'unité :*	*Règle de trois :*
15 billes = 2×6 billes + 3 billes 6 billes coûtent 2,2 € • 12 billes coûtent 4,4 € (2,2×2) • 3 billes coûtent 1,1 € (2,2÷2) 15 billes coûtent 5,5 € $(4,4+1,1)$	6 billes coûtent 2,2 € • 1 bille coûte 0,37 € $(2,2 \div 6)$ 15 billes coûtent 5,55 € $(15 \times 0,37)$	6 billes coûtent 2,2 € 15 billes coûtent 5,5 € $(15 \times 2,2 \div 6)$
Méthode de calcul mental.	*Méthode ayant du sens, mais attention aux arrondis !*	*Méthode experte très rapide mais similaire à une « recette de cuisine ».*

On aurait pu également utiliser le coefficient de proportionnalité pour passer de 6 billes à 15 billes (2,5), mais cette procédure est beaucoup plus difficile pour les élèves si le coefficient multiplicateur n'est pas « simple ».

Ensuite, les élèves sont amenés à lire, interpréter et utiliser divers modes de représentation graphique. Dans un premier temps, les élèves sont mis en situation de lecture et d'interprétation, puis, dans des cas simples, ils étudient des situations de proportionnalité, et notamment le caractère linéaire de la représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

3 Typologie des problèmes posés

On peut classer les problèmes de proportionnalité en plusieurs catégories :

- Problèmes de recherche d'un **4ème proportionnelle** : trois données sont connues, et on recherche la quatrième.

a	b
c	?

Ce type de problème peut porter sur des grandeurs de même nature ou de nature différente.

Exemple 2

Grandeurs de même nature

Sur une carte de la Réunion, 1 cm représente 200 000 cm dans la réalité. Pour aller de Saint-Denis à Saint-Pierre, on trouve 35 cm sur la carte. À quelle distance réelle se trouve Saint-Denis de Saint-Pierre ?

grandeurs de nature différente

J'ai payé 15 € pour 2 kg de fruits de la passion. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 5 kg ?

- Problèmes de **comparaison** : deux grandeurs sont en présence mais impliquées dans deux situations différentes. La question porte sur la comparaison des deux situations.

Exemple 3

Comparaison de deux mélanges

Un mélange A est composé de 9 g de sucre dans 4 ℓ d'eau. Un mélange B est composé de 11 g de sucre dans 5 ℓ d'eau.
Quel est le mélange le plus sucré ?

Comparaison de promotions

Une grande surface propose la promotion suivante : les 10 petits pains au chocolat à 2,90 € ou le lot de 4 au prix de 1,50 €. Dans lequel de ces deux lots le prix d'un petit pain est-il le plus intéressant ?

- Problèmes de **double proportionnalité** : cas d'une variable proportionnelle à deux autres variables qui peuvent être modifiées de manière indépendante.

Exemple 4

Double proportionnalité « unitaire »

Pour un séjour à la montagne, le prix est de 20 € par personne et par jour. Quel est le prix d'un séjour pour un groupe de 4 personnes et pour 6 jours ?

Double proportionnalité « multiple »

Sachant que 6 poules pondent 6 oeufs en 6 jours , combien 12 poules pondent-elles d'oeufs en 12 jours ?

- Problèmes de **reconnaissance ou non de la proportionnalité** dans les différents cadres : situations familières, examen d'une suite de nombre,...

Exemple 5

Proportionnalité or not ?

À deux ans, je mesurais 80 cm. Quelle taille ferais-je lorsque j'aurai vingt ans ?

Suites de nombres

Si 10 cahiers coûtent 8 €, 20 cahiers coûtent 16 € et 25 cahiers coûtent 20 €, est-on dans une situation de proportionnalité ?

- Problèmes de **pourcentages, d'échelle, d'agrandissement et de réduction** : ce sont des problèmes qui relèvent tous de la proportionnalité.

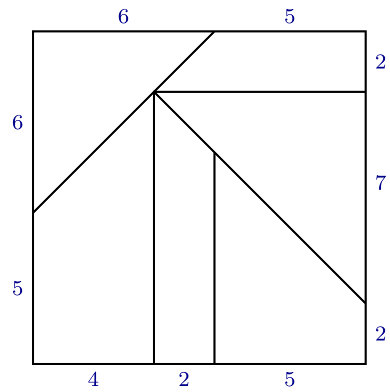
Exemple 6
Pourcentages et puzzle de Brousseau [1]

Pourcentages

Dans une école, 4 élèves sur 5 mange à la cantine.
Yoan dit qu'il y a 20% des élèves qui ne mangent pas à la cantine.
A-t'il raison ?

Agrandissement (Puzzle de Brousseau)

Les élèves sont mis par groupe de 6 et chaque élève d'un groupe doit faire un agrandissement d'une pièce du puzzle.
À la fin, on regroupe les pièces pour reconstituer le puzzle.
La consigne est : le côté du puzzle qui mesure 4 cm doit mesurer 7 cm sur le puzzle que vous devez construire.



4 Les principales variables didactiques

On peut également recenser quelques catégories de variables didactiques :

Le cadre de résolution :
cadre des grandeurs (nombres correspondants à des quantités, mesures), cadre numérique (abstraction, lien avec des propriétés) ou cadre graphique(alignement ou non des données). À l'école primaire, ce sera essentiellement le cadre des grandeurs qui sera utilisé.

Le type de situation :
situation où la proportionnalité intervient par convention sociale (problèmes de nature économique de la vie courante), situation où la proportionnalité permet une modélisation d'un phénomène (physique, géométrique), situation où la proportionnalité intervient comme outil pour définir de nouveaux concepts (échelle, pourcentage). Une situation familière favorise la mise en œuvre de raisonnements adaptés et le contrôle des résultats.

La typologie des problèmes recherchés :
cf. section 3 de ce chapitre.

Le nombre de grandeurs de leur domaines :
nombre de grandeurs mises en jeu dans un même problème, domaines qui caractérisent ces grandeurs (longueurs, prix, quantités, poids...).

Le types de nombres utilisés :
nombres entiers, nombres décimaux, nombres fractionnaires, le type de nombre favorise ou non le calcul mental ou une procédure experte.

Le nombre de couples donnés et la relation qu'il y a entre ces nombres :
permet ou non de faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité.
À cette occasion, on pourra introduire les graphiques.

1. Guy Brousseau, 1981, Problèmes de didactique des décimaux, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 2.1.

5 Les difficultés rencontrées par les élèves

Elles sont multiples, en voici quelques-unes :

Difficultés à identifier les grandeurs en relation dans les situations proposées.

Il est nécessaire que cette tâche soit le plus souvent assumée par les élèves, et donc que la situation ne soit pas déjà schématisée sous forme de tableau. La réalisation du tableau ou d'une autre organisation des données est, en effet, une occasion de prendre conscience des grandeurs en relation.

Difficultés à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnel ou non.

La plupart des problèmes ne précisent pas explicitement si la situation est une situation de proportionnalité. C'est à l'élève de faire appel à ses références personnelles ou à deviner l'intention du maître (contrat didactique). Il appartient donc à l'école de doter les élèves de situations de référence suffisamment nombreuses (domaine économique, physique, géographiques, mathématique...).

Il est important que les situations étudiées ne relèvent pas toutes du modèle proportionnel afin d'exercer la vigilance des élèves sur le choix des modèles et des procédures.

Certains pensent par exemple, à tort, que toute situation où les données numériques sont organisées en tableau relève toujours de la proportionnalité.

Difficulté qui provient du fait qu'il faut choisir une procédure de résolution parmi toutes celles qui sont possibles.

Nous avons vu qu'il n'existait pas une procédure unique menant à la résolution d'un problème de proportionnalité. L'élèves devra donc faire un choix.

Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des variables didactiques décisives.

Mise en oeuvre de la procédure choisie.

Reconnaître des combinaisons linéaires n'est pas un travail facile est demande une bonne connaissance des nombres. L'exécution des calculs peut être aussi source de difficultés (décimaux, fractions).

Comprendre que le fait qu'il y ait des augmentations ou des diminutions n'est pas forcément lié à des notions d'additions ou de soustraction.

Les expériences antérieures des élèves ont installé des idées fortes du genre « augmentation signifie addition et diminution signifie soustraction ».

Au moment de l'apprentissage de la proportionnalité, une rupture nécessaire avec ces concepts s'impose. Il appartient à l'enseignant de favoriser des situations problème pour que cette rupture puisse se faire.